Explosión analítica

Sergio Quiroga Sandoval

September 11, 2023

Durante esta bitacora decidí usar la metáfora de una "explosión inicial" porque siempre se me ha asemejado la creación de un sistema axiomático con la planeación de una bomba, que se detona cuando se dejan fijos los axiomas, para dar paso al incendio de resultados, la creación de un nuevo universo. Resultados a los cuales podemos acceder abriendonos paso cuidadosamente entre chispas y destellos *desordenados*.

1 El uno-mutiple

El concepto "uno-multiple" es la polaridad y combustible que detona el nacimiento de la teoría de conjuntos, gracias a él se pueden desarrollar de manera natural los primeros axiomas de la teoría de conjuntos como se muestra en la figura 2. Es importante pensar en las polaridades a la hora de estudiar la creación de conocimiento, por ello vale la pena nombrar las dialécticas finito-infinito, conexo-disconexo, discreto-continuo. G. Cantor empezó a estudiar la noción de continuidad que aún estaban escondida en el humo.

2 Hacia la continuidad

- Conjuntos derivados: G. Cantor conjeturó que aquellos conjuntos que contienen todos sus puntos de acumulación debían capturar una parte importante de la noción de continuidad.
- Un conjunto es perfecto cuando es igual a su derivado, es decir, contiene todos sus puntos de acumulación. Estos se vuelven un candidatos iniciales para capturar la noción de continuidad, pues "contienen todos sus limites".

Cantor mismo se da cuenta que esto no es suficiente con el "conjunto tri-adico de Cantor" que es totalmente disconexo pero perfecto. Nueva conjetura: Se necesitan conexidad y perfección para que un conjunto sea continuo.

3 ¿Cómo ordenar?

Cantor crea los signos, llamados *ordinales*, un concepto que nace como "la iteración infinita más alla de los naturales", para representar o "indexar" conjuntos derivados. Además del orden Cantor se pregunta por el tamaño de los conjuntos, llegando a la Hipótesis: "Todo conjunto está asociado a un cardinal". es natural entonces hacerse la pregunta de si ¿todo conjunto está asociado a un ordinal? Esta resulta ser independiente, una chispa inaccesible, por lo tanto Zermelo decide introducir el Axioma de elección para mostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado.

Cantor se da cuenta que ha creado un universo donde existen conjuntos infinitos que dominan a otros que también lo son, "lo veo pero no lo creo". Luego sigue trabajando en teoría de cardinales y de ordinales. $\aleph_1 = \{\, \alpha \mid \alpha \text{ es un ordinal enumerable} \,\}$ Conjeturó la hipótesis del continuo: "no hay cardinal entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. Creó una escala creciente de infinitos: los $\aleph$.

4 Multiplicidades inconsistentes

Preocupación de Cantor: Multiplicidades para las cuales no hay una representación consistente. Las clases propias que no son conjuntos, o siguiendo nuestra metáfora, subexplosiones que no se pueden explicar a partir de la bomba inicial, no se entiende qué las origina pero son claros remanentes de la explosión original). Como si una de las llamaradas singularmente se transformara en una estrella, aislada del incendio volviendose inaccesible.

- Colección de todos los alephs.
- Colección de todos los ordinales.
- Colección de todos los conjuntos.

5 Hacia los Reales

Como se muestra en la figura 1, los numeros reales satisfacen una colección de propiedades interesantes. La conexidad, la perfección y por tanto la continuidad, la no enumerabilidad y ser la completación de los racionales. La unica que queda abierta a la duda es si constan de un buen orden, lo cual resulta ser equivalente al axioma de elección.

6 Lógica clásica

Una lógica para la teoría de conjuntos debe ser necesariamente la lógica clásica (verificar compacidad y lowenheim skolem) Esto le concede su Lugar central historicamente a la lógica clásica. Sin embargo vale la pena explorar los demás tipos de lógicas como la intuicionista o la lógica de haces.

7 Brouwer: topología intuicionista

Lo discreto surge a partir de cortes en lo continuo. Un proceso más natural. calculo proposicional intuicionista: no se tiene que (p o no p), no es suficiente la existencia, hay que construir.

8 Calculos intermedios entre el Clásico y el intuicionista

Godel demuestra que hay infinitos, Heyting que hay un continuo.
Modelo $S5$ (lógica modal), Teorema ontológico de Godel "al pensar en la posibilidad de la existencia de Dios o nos toca aceptar la necesidad de su existencia o nos toca descreer de S5", Descreer de S5 implicaría descreer de topología y las algebras booleanas.Pregunta individual: ¿realmente como está ligado S5 a la topología?

9 Preguntas inquietantes

Queda una pregunta, ¿Cómo es posible que a partir del universo contruido (a partir del uno-multiple) se generen individuos escencialmente diferentes y no cognosibles bajo el concepto del uno-multiple?. ¿Cómo es posible que una teoría cree algo a lo que no puede acceder?. *¿Cómo es posible que el estallido de una bomba provoque una chispa que se convierta en una estrella inaccesible?*