

Teoría de Categorías, Auras y el Lema de Yoneda

Sergio Quiroga Sandoval

October 3, 2023

1 Teoría de Categorías

1.1 Saunders Mac Lane, Eilenberg.

Bajo la escuela de Hilbert, "el gran fundamentador".

Mac Lane y Eilenberg inventan la teoría de categorías para el estudio de los tránsitos que había entre la homología y la homotopía, conceptos de topología algebraica (Poincaré) ¿Cómo se estudia el continuo? Inventan un funtor entre la categoría de espacios topológicos y la de los grupos. Su riqueza está en la lectura que nos da de la matemática.

1.2 Categoría:

Conjunto de objetos con una composición asociativa y con neutros. La teoría de categorías es jerárquica:

Primer nivel: tránsitos entre objetos, morfismos.

Segundo nivel: tránsitos entre categorías, funtores. Ir y venir de información que preserva asociación y neutros.

Tercer nivel: tránsitos entre funtores, transformaciones naturales. Preservan conmutación de cuadrados.

Objetos iniciales:

- En la categoría de conjuntos: conjunto vacío.

- En la categoría de grupos: grupo con un único elemento.

Estos dos objetos tan distintos provienen del mismo concepto de "objeto inicial" en una categoría abstracta.

2 Grothendieck

Hace una generalización de los espacios topológicos y los hace en la teoría de categorías con sus "topos", dando un marco unificado para estudiar una variedad de conceptos matemáticos distintos.

3 Lema de Yoneda

Corazón de la teoría de categorías.

Aura: Morfismos que salen del objeto dentro de la cantidad de categorías en las que vive.

Functor representable: funtor que envía un objeto a su aura.

Dada una categoría tal que su colección de conjuntos no sea una clase propia, Se puede entender cada objeto como su functor representable haciendo un proceso de **completación** análogo a la completación que imponen los trascendentes a los algebraicos para formar el espacio completo de los Reales.

Cada ambiente concreto resulta ser un fragmento de un mundo mucho más rico que lo envuelve donde se tienen todos los **límites** y las herramientas matemáticas.

3.1 Objetos ideales:

Los objetos reales son los de la categoría inicial, los ideales son aquellos que aparecen en el proceso de completación. Es importante ver que en este sentido la realidad necesita al mundo de los ideales para completarse y gracias al mundo de los objetos ideales entendemos más profundamente la realidad.

La lectura sintética permite un acceso a lo que es invisible en la lectura analítica.

4 Observar el cielo

La experiencia de observar el cielo nocturno en una ciudad es desafiante, la luminosidad dificulta la visión de planetas y estrellas, dejando apenas unos pocos visibles. Mejor sería ir a la cima de un

cerro elevado y obtener una visión más clara del firmamento, revelando nuevos objetos e incluso constelaciones. Más interesante aún, sería de alguna forma seguir subiendo hasta el espacio exterior, para obtener toda la información que la atmósfera del planeta bloquea.

Es claro entonces que, en ocasiones, subir y alejarse de lo particular nos da mayor claridad y visión. Llegando al espacio exterior entenderíamos mucho mejor que nuestro punto de partida era, en realidad, un planeta más de los muchos que observábamos. Este proceso ilustra cómo la abstracción nos invita constantemente a ampliar nuestros horizontes para luego, estando en el espacio **ideal** ampliado, poder comprender las transformaciones, propiedades y tránsitos que caracterizan lo particular.

Esta es la naturaleza del tránsito entre categorías abstractas y categorías concretas.

5 Preguntas inquietantes

1. Para una teoría sintética y analítica ¿Cómo cambian los auras al hacer cambios en las partes que componen un objeto? O de otra forma, ¿al variar un objeto desde su composición analítica, qué proceso de transformación sufre su aura y qué queda invariante?
2. Al aplicar el Lema de Yoneda ¿Qué tanto se puede escalar en el uso de "auras de auras", "auras de auras de auras", ..., para obtener más información del objeto? ¿Llega un punto en que este proceso deja de dar información nueva o importante? ¿Cómo se caracteriza tal punto?

