Poincaré, los primeros funtores y Grothendieck el Gran Sistemático

Sergio Quiroga Sandoval

October 10, 2023

1 Henri Poincaré

1.1 Ecuaciones diferenciales

- Es considerado el fundador de la teoría del caos, pues inventa los **sistemas dinámicos** y usa los grupos para capturar algunas de sus propiedades. Encuentra propiedades **topológicas** de los **conjuntos soluciones** de ecuaciones diferenciales.
- La **geometría no euclidiana** captura el extracto de las ecuaciones diferenciales ordinarias y los **grupos automorfos** capturan propiedades de sus soluciones.

1.2 Topología algebraica

- **Homotopía y Homología**: Intenta capturar la esfera en 4 dimensiones y el grupo de homología no alcanza. Conjetura de Poincaré: intentar resolver este problema usando la homotopía.
- El **Grupo Fundamental**: Con él establece una nueva forma de entender los espacios topológicos con herramientas algebraicas, define un funtor entre Top y Group.

1.3 Creación e invención matemática

Poincaré señala una lucha entre la invención/descubrimiento y la prueba/regulación lógica. La lógica sirve para darle una arquitectura estable al pensamiento matemático, pero no lo impulsa. La iluminación repentina que desvela relaciones escondidas es la que hace explotar la matemática. Para que ella suceda se necesita de los errores, los procesos creativos impulsados por esfuerzos voluntarios y luego interrupciones fuertes que obliguen a la búsqueda de analogías y familiaridades insospechadas.

- Importancia de las analogías: mientras una analogía sea entre ramas más alejadas de la matemática, más profunda será.

2 Alexander Grothendieck

Gran sistemático, especialista en múltiples ramas como análisis funcional, topología, variable compleja, álgebra. Conector de las líneas de Galois y Riemann.

2.1 Sistematización

- Para Grothendieck siempre debía existir un lugar ideal donde los problemas difíciles fueran sencillos; lo importante era ver cada problema desde el contexto adecuado, llevarlo a un espacio ideal donde se pueda resolver de forma **natural** y desde allí proyectarlo de nuevo a su contexto particular.
- La gran maquinaria, grandes sistemas, nuevas definiciones y contextos matemáticos abundan en la obra de Grothendieck. Por ejemplo, introduce una generalización de los espacios topológicos y los **haces** en la teoría de categorías con sus "topos", dando un marco unificado para estudiar una variedad de conceptos matemáticos distintos.
- Crea la teoría de **Cohomología Étale** y los **Topos**; con ellos demuestra las conjeturas de Weil. El poder de esta nueva herramienta no se queda allí; brinda nuevas pistas para la hipótesis de Riemann; en este sentido, es impresionante el poderío con que emergen las creaciones de Grothendieck.
- Introduce la **K-teoría** donde enuncia y demuestra el teorema de Riemann-Roch-Grothendieck.
- Crea la **Teoría de derivadores**: un gran sistema donde la homología y homotopía de Poincaré son casos particulares.

3 Pregunta inquietante sobre Espacio y física matemática

1. Históricamente se ha modelado el espacio físico con los reales, sin embargo se ha evidenciado que el universo no cumple el principio arquimediano a escalas menores a la de planck; Esto sugiere que se usen sistemas como los p-ádicos. ¿Existe un concepto de variedades p-ádicas?¿Pueden herramientas de la topología algebraica ser trasladadas al ámbito de los p-ádicos?¿Qué se pierde de la topología usual de R? ¿Cómo cambiarán las propiedades topológicas para cada elección de p?