Analysis situs y la caracterización de esferas

Epistemología e historia de las matemáticas
Autor: Sergio Quiroga Sandoval
Profesor: Fernando Zalamea

Noviembre 2023

Algunas de las ideas que llevaron a la formulación de la conjetura de Poincaré.

1 Objetivo

Desarrollar un recorrido por algunas de **las ideas** expuestas en el Analysis Situs [1] de Henri Poincaré; empezando por los **complejos simpliciales** y su importancia como herramienta analítica para hacer triangulaciones a estructuras complejas y poder descomponerlas en objetos conocidos, la **Homología** y el **grupo fundamental** de homotopía entendidos como herramientas sintéticas que integran el álgebra y la topología, hasta la aplicación de estas herramientas para **caracterizar esferas** llegando a las **obstrucciones** fundamentales y el contraejemplo importante de la **esfera de homología** que condujo naturalmente a la formulación de la conjetura de Poincaré.

2 Introducción

El estudio de la continuidad nos lleva a los conjuntos abiertos, cuyo ambiente natural son los espacios topológicos; el problema de entender la continuidad implica entonces poder **caracterizar y clasificar** espacios. Felix Klein en su programa Erlanger define la topología como el estudio de aquellos **invariantes** de las transformaciones continuas de puntos [2]. Es entonces importante encontrar nuevos invariantes que nos permitan tener cada vez más poder de clasificación y mayor entendimiento de las características de un espacio. Este trabajo es una primera lectura y recopilación de algunas **ideas subyacentes** a creaciones de Henri Poincaré.
La primera pregunta que indagaremos es ¿De qué forma podemos detectar **agujeros** en un espacio?, una vez estudiadas herramientas que permiten caracterizar agujeros es natural preguntar ¿Son lo suficientemente poderosas estas herramientas para detectar cuando no hay agujeros? ¿Logran **detectar** cuando un espacio es homeomorfo a una **esfera**? o ¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que ello ocurra?

Estas son algunas de las preguntas con las que se encontró Henri Poincaré mientras desarrollaba su Analysis situs, sin embargo como dice John Stilwell en su traducción [1]:

> ”Quizá el más profundo de los problemas abiertos que nos dejó inició siendo una afirmación que parecía trivial”.

Este fué el caso de la famosa **conjetura de Poincaré.**

3 Descomponiendo el espacio

¿Cuál la figura geométrica **más simple** que podemos construir en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ que a su vez sea lo **suficientemente compleja** para **exhibir su naturaleza**?

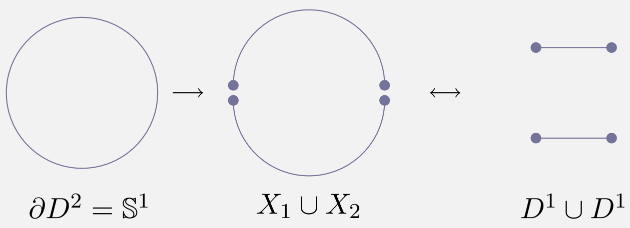
Para resolver esta pregunta se debe especificar de qué forma es simple un espacio y qué significa exhibir la naturaleza del espacio euclidiano en el que vive. Una noción analítica de simplicidad es que un objeto se pueda descomponer fácilmente en partes y que aquellas partes sean objetos ya conocidos o simples en este mismo sentido, esto es lo que buscaremos. Además se entenderá que un espacio captura o exhibe la naturaleza del espacio euclidiano en el que vive desde que contenga una copia homeomorfa a él (el símbolo $\cong$ denotará espacios homeomorfos).

3.1 Una primera elección

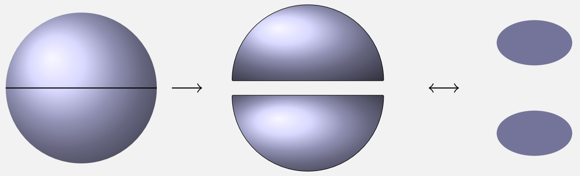
Veamos un primer intento de elegir un espacio con las características deseadas, algunas ideas de esta sección fueron motivadas por [3].
Para el espacio 0-dimensional solo se puede elegir un punto x_0.
Para $\mathbb{R}$ el punto vuelve a ser una opción, pero este no captura su naturaleza, en cambio un intervalo $D^1 = \{x \in \mathbb{R}; |x - 0| \leq 1\}$ contiene en su interior una copia topológica de $\mathbb{R}$, es decir $Int(D^1) \cong \mathbb{R}$, tenemos entonces un buen candidato para nuestro propósito. en $\mathbb{R}^2$ podemos pensar análogamente en un disco cerrado $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; ||x - 0|| \leq 1\}$ pues $Int(D^2) \cong \mathbb{R}^2$. De esta forma se tiene un primer conjunto de estructuras simples formado por los discos cerrados n-dimensionales, se elige r = 1 por simplicidad.

¿Qué sucede en la **frontera** de estas estructuras?

Note que $\partial D^2 = \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; ||x - 0|| = 1\}$ y $\mathbb{S}^1 \ncong D^1$, luego, la frontera de un disco no resulta ser otro disco sino una esfera en dimensión menor. [4]
Sin embargo, podemos pensar en la frontera de D^2, es decir, la esfera $\mathbb{S}^1$ como una unión de varios espacios (no disyuntos) homeomorfos a discos D^1, por ejemplo, podríamos tomar X_1, X_2 tales que $X_1 \cup X_2 = \mathbb{S}^1$ de la siguiente forma.



Analogamente:
Podemos pensar en la frontera de D^3, es decir, la esfera $\mathbb{S}^2$ como la unión de varios espacios homeomorfos a discos D^2, por ejemplo, podríamos tomar X_1, X_2 tales que $X_1 \cup X_2 = D^3$ de la siguiente manera:



$\partial D^3 = \mathbb{S}^2$ $\quad$ $X_1 \cup X_2$ $\quad$ $D^2 \cup D^2$

Así, vemos que la frontera de D^n, es decir, la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ se puede construir como la unión de varios espacios $X_1, X_2, \ldots, X_m$ homeomorfos a discos D^{n-1}.

Sin embargo la elección de los $X_1, X_2, \ldots, X_m$ resulta arbitraria, hay muchas elecciones posibles que tienen este mismo resultado. La necesidad de hacer esta elección arbitraria es una limitación que lleva a buscar una figura distinta donde no haya tal situación a la hora de descomponer su frontera, se genera la siguietne pregunta:

> ¿Existe una **figura**/espacio n-dimensional con la ventaja de que su **frontera** se pueda construir de forma **natural** con figuras de su **mismo tipo** en una **dimensión menor**?

Se tendrá respuesta a este interrogante en la sección 4.3.

3.2 Combinaciones convexas

Podemos caracterizar completamente un intervalo $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ por sus extremos x_1, x_2 y sabemos que cada uno de los puntos que contiene puede ser escrito como una parametrización $x_1 + t(x_2 - x_1)$ o $(1-t)x_1 + tx_2$, donde $t \leq 1$.
El anterior hecho motiva a definir la **combinación convexa** del conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ como los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ de la forma $x = t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_kx_k$ donde cada $x_i \in X, 0 \leq t_i \leq 1$ y $\sum_{m=1}^{k} t_m = 1$.

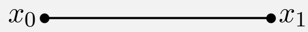
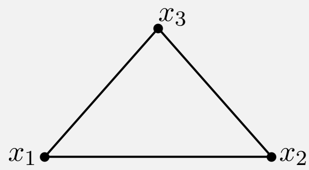
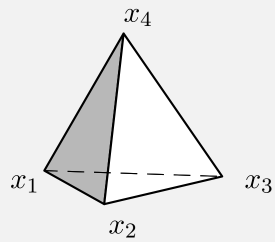
3.3 Clausura convexa

El conjunto de todas las combinaciones convexas de $X \subset \mathbb{R}^n$ se llama clausura convexa de X y se denota $co(X)$.
Ejemplos:

- Si $X = \{x_1\}$, $co(X) = \{x_1\}$.
- Si $X = \{x_1, x_2\}$, $co(X) = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = t_1x_1 + t_2x_2, 0 \leq t_i \leq 1, t_1 + t_2 = 1\} = [x_1, x_2]$.
- En geometría euclidiana, los conjuntos convexos son aquellos en que los segmentos entre dos puntos cualesquiera del conjunto están contenidos en el conjunto. Un conjunto es convexo si y solo si es igual a su clausura convexa.
- Si $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $co(X) = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3, 0 \leq t_i \leq 1, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$.

3.4 Símplices

Note que la clausura convexa de un punto corresponde a un punto, además podemos ver que $co(x1, x2) \cong D^1$ y dados x_1, x_2, x_3 no colineales tendremos $co(x1, x2, x_3) \cong D^2$.
El conjunto $\Delta^n = \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{m=1}^{n} t_m = 1\}$ se llama símplice n-dimensional.

Dimensión	símplice	representación
0	$co(x_1)$	
1	$co(x_1, x_2)$	
2	$co(x_1, x_2, x_3)$	
3	$co(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
4	$co(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$	¿?
...	...	...

La **frontera** de un n-simplice está constituida por n-1 símplices y en este caso, a diferencia de los discos antes discutidos, hay una **elección natural** para hacer esta descomposición; Los símplices son la figura geométrica que se buscaba.
En un símplice una **n-cara** es un subconjunto de los vertices con orden n+1. Dos símplices Δ_1^n, Δ_2^n se dicen **bien situados** si $\Delta_1^n \cap \Delta_2^n = \emptyset$ o $\Delta_1^n \cap \Delta_2^n = \Delta^{n-1}$ tal que Δ^{n-1} es cara de ambos simplices.
Los símplices se usarán para ”triangular” espacios, las **triangulaciones** con simplices se llaman complejos simpliciales y son definidas a continuación.

3.5 Complejos simpliciales

Un complejo simplicial es un conjunto finito de simplices $K = \{\Delta_1^n, \Delta_2^n ..., \Delta_k^n\}$ que cumple las siguientes condiciones [5] :

- Si $\Delta_i^n, \Delta_j^n \in K$ entonces Δ_i^n, Δ_j^n están bien situados.
- Para todo $\Delta_i^n \in K$ y dada α una cara de Δ_i^n, se tiene $\alpha \in K$.

4 Homología

Esta sección pretende revisar la definición que presenta Poincaré de Homología en el **quinto capítulo** del Analysis situs.
Una n-Variedad es un espacio donde para cada punto existe una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, esta es la definición moderna, sin embargo Poincaré introduce dos definiciones distintas para este concepto, La siguiente es la definición de Homología presentada por Poincaré:

> Sean V, Wvariedades de dimensión p,q respectivamente tales que $W \subset V$. Si la frontera de W está compuesta por λ variedades de dimensión $q-1$ entonces se dice que:

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_\lambda \sim 0$$

Poincaré define de forma más general este mismo concepto teniendo en cuenta la orientación de la variedad, de la siguiente manera:

$$K_1 V_1 + K_2 V_2 = K_3 V_3 + K_4 V_4 \sim 0$$

> Esto es, existe en V una variedad W de dimensión q cuya frontera consta de K_1 "copias" de la variedad V_1, K_2 "copias" de la variedad V_2, K_3 "copias opuestamente orientadas" de la variedad V_3 y K_1 "copias opuestamente orientadas" de la variedad V_1.

El **concepto** más importante para la homología es el de **borde o Frontera**. Se logra captar con la homología la idea de componer un borde a partir de "sub-variedades" en alguna orientación.

5 Números de Betti, conectividades en distintas dimensiones

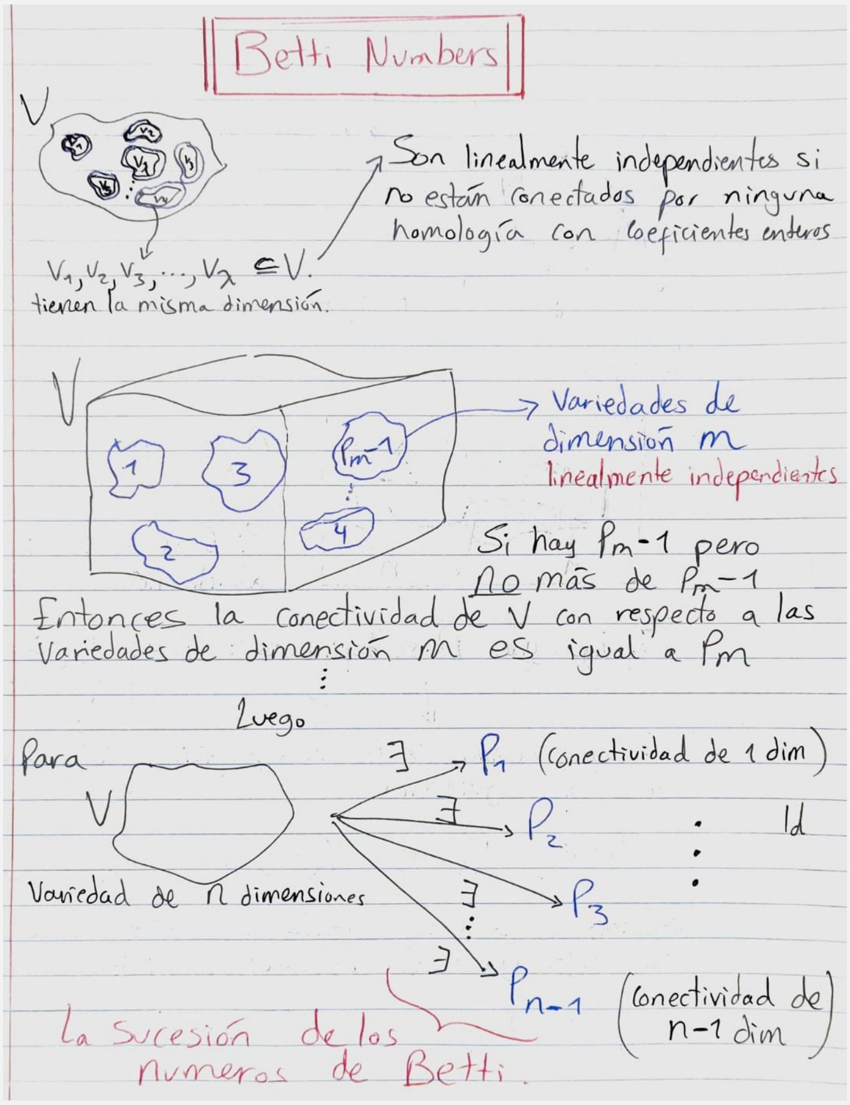
Esta sección pretende sintetizar las ideas expuestas por Poincaré acerca de los **números de Betti** P_m estudiados en el sexto capítulo del analysis situs.

Son aquellos que caracterizan la **conectividad** m-dimensional de una variedad.

Poincaré descubre un **teorema de dualidad**: para una n-variedad se cumple que $P_m = P_{n-m}$.

La **sucesión** de números de Betti brinda información de la **relación** de una variedad con **los posibles** agujeros o vacíos en distintas dimensiones.

El número de Betti P_m Puede entenderse como el **número de variedades** de dimensión m se necesita **remover de** V para "**desconectarla**".



6 Grupo fundamental

Se pretende sintetizar la perspectiva actual sobre el grupo fundamental.
El grupo fundamental es una nueva herramienta que permite detectar agujeros y avanzar en la caracterización de espacios.

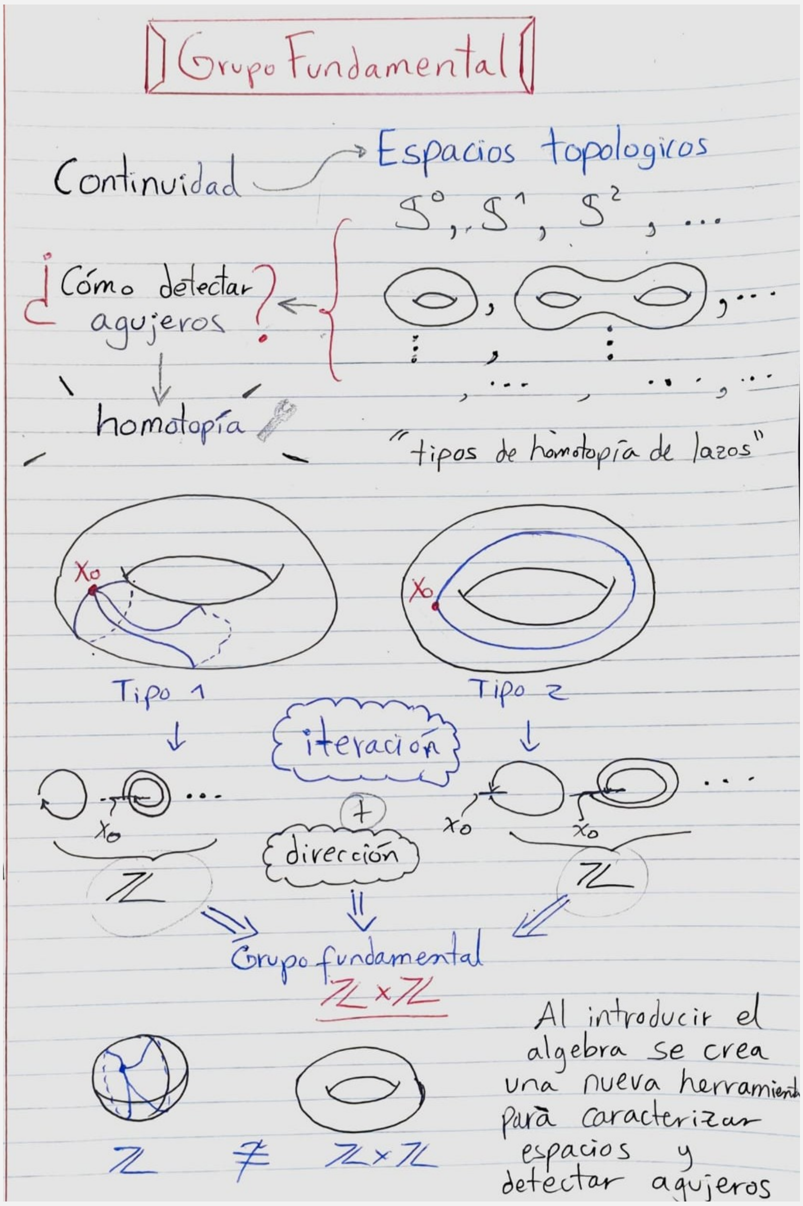
Un ciclo es una función continua $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$.

El grupo fundamental de X con base en x_0 denotado $\pi_1(X, x_0)$ tiene como elementos los "tipos de homotopía de ciclos" que son las clases de equivalencia resultantes de el conjunto de ciclos con base en x_0 y la relación de homotopía.

La operación del grupo es la concatenación de loops:
$\gamma_0 \cdot \gamma_1 : [0,1] \to X$

$$\gamma_0 \cdot \gamma_1 = \begin{cases} \gamma_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

La palabra "iteración" en la imagen se refiere a que bajo la relación de homotopía cada vez que un ciclo vuelve a x_0 se vuelve un tipo de ciclo distinto, es decir, a cada "vuelta" se tiene un nuevo elemento en el grupo; la orientación de los ciclos termina de generar $\mathbb{Z}$.



Poincaré introdujo el Grupo Fundamental como un **nuevo invariante** para analizar propiedades topológicas de los espacios, es importante destacar la **eficacia** de emplear conceptos **discretos del álgebra abstracta** para abordar aspectos **continuos de la topología**. En el grupo fundamental la atención se centra en comprender características del continuo mediante el análisis discreto. Esta estrategia evoca nociones de **Brouwer**, donde lo **discreto** se conceptualiza como **cortes en lo continuo**, distanciándose de la idea abrupta de que el continuo surge como una acumulación violenta de elementos discretos.

7 Caracterización de esferas

Una primera aplicación de la homología y el grupo fundamental es intentar detectar esferas, esto es, ver si hay una caracterización de las esferas usando estos nuevos invariantes para distinguir cuando un espacio es homeomorfo a una esfera. Luego de introducir las triangulaciones con símplices y la homología, Poincaré hizo la siguiente conjetura en el segundo anexo al Analysis situs:

"Una variedad cerrada con homología trivial es homeomorfa a una esfera". Lo anterior resultó ser falso.

7.1 La esfera de homología de Poincaré

En el quinto anexo del analysis situs Poincaré descubre la esfera de homología; un claro contraejemplo para su anterior conjetura (La homología trivial no detecta a la 3-esfera). [6] Hay al menos 8 formas distintas de construir la esfera de Homología, pueden ser consultadas en [7]. Resacataremos la idea esencial: Poincaré se preguntó ¿Pueden dos variedades tener la misma sucesión de numeros de Betti pero tener un grupo fundamental distinto? La esfera de Homología es una 3 variedad que resulta tener los mismos números de Betti que la 3- esfera, homología trivial pero grupo fundamental no trivial. [8]

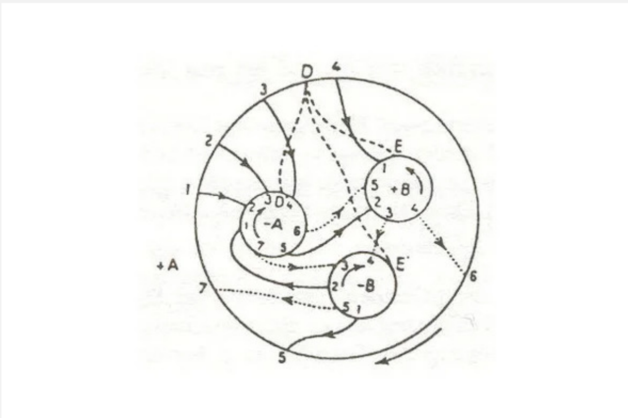


Figure 1: Diagrama de Heegard de la esfera de homología. Creditos: Henri Poincaré Manifold Atlas (GFDL 1.3)

Posteriormente, ya que la homología no logra detectar a la 3-esfera, Poincaré se cuestiona lo que en un principio asumió: ¿podrán la homotopía y el grupo funamental hacerlo?

8 Conjetura de Poincaré

En el quinto suplemento Poincaré llegó al problema definitivo, conjeturando:

"Una 3-variedad cerrada con grupo fundamental trivial es homeomorfa a la 3-esfera".

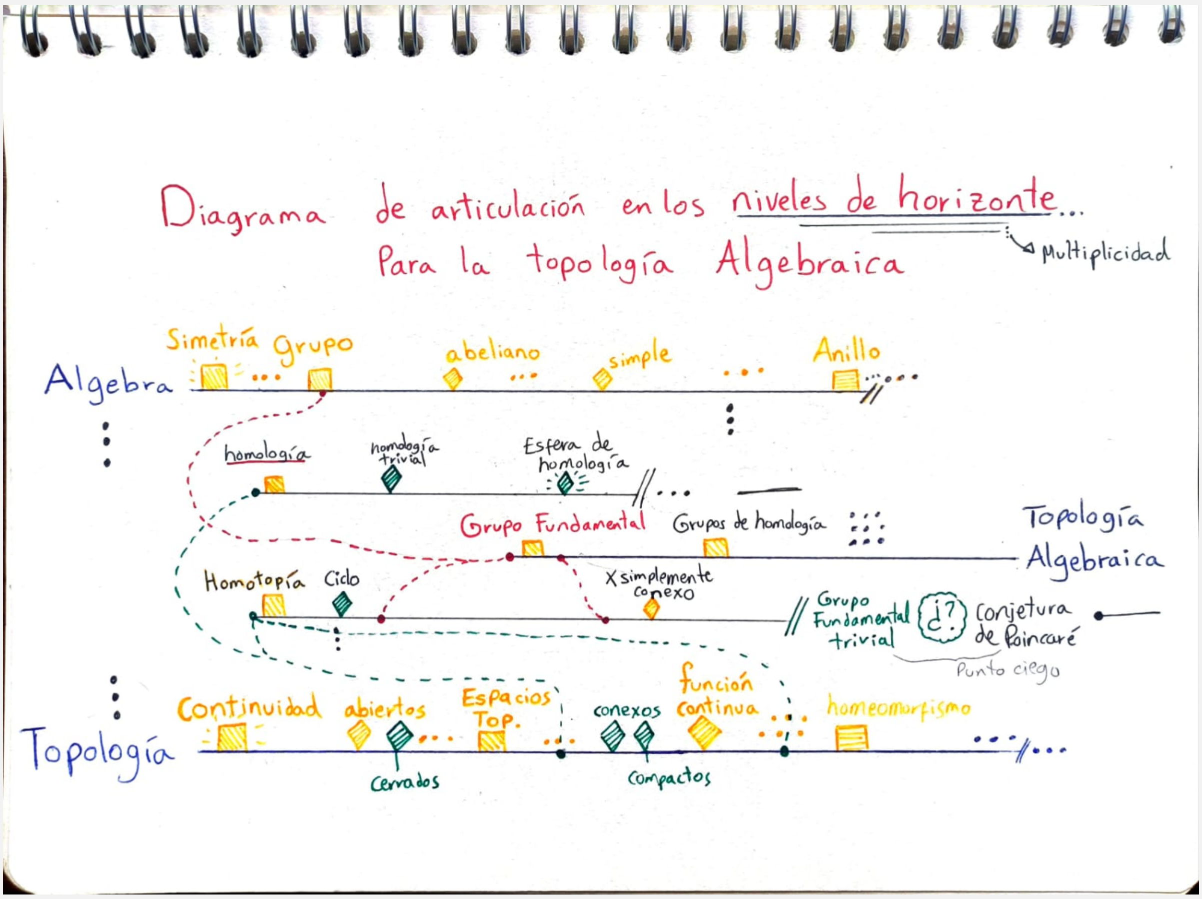
Aquí nació su famosa conjetura, probada finalmente más de un siglo después por Grigori Perelman en 2002. Esta conjetura necesitó el tiempo suficiente para la creación de herramientas poderosas como el **flujo de Ricci** que permitieran atacarla definitivamente.

9 Diagrama de la Topología algebraica como mixto

En el siguiente diagrama se representan algunos conceptos epistemológicos de la topología algebraica como son los distintos niveles de horizonte de **Desanti**, algunos ejemplos de puntos ciegos y visagras horizonte, así como el surgimiento de virtualidades de **Chatelet**, en este caso con el grupo fundamental. Se analiza la topología algebraica como un gran mixto de **Lautman**. El diagrama evidencia las siguientes dos frases de Desanti:

> ”todo **dominio de estratificación** despliega un campo específico de **posibles**”.
> ”La matemática produce ella misma su propio suelo, no existe otro suelo que aquel que ella produce y reproduce sin cesar”.

Se usan los símbolos de posible $\Diamond$ y necesario $\Box$ haciendo referencia a los modelos de Kripke, que codifican la temporalidad y se intenta representar que en cada dominio de posibles también existen algunos conceptos necesarios que interactúan en todo el futuro de cada nivel.
Cuando se **rompen los necesarios** se salta de nivel, ya sea a otro preexistente o a un **nuevo mixto**.
La **acumulación de posibles** puede **generar necesarios**, como el caso de la acumulación de abiertos lleva a la creación de los espacios topológicos, representados en el primer estrato.
Hay dos **obstrucciones fundamentales** en los niveles intermedios, estas son respecto a la **homología trivial** (y la esfera de homología) y el **grupo fundamental trivial** (y la conjetura de Poincaré), como se mencionó anteriormente, son obstrucciones frente a la detección esferas.



10 Aspectos analíticos, sintéticos y Horóticos de las ideas trabajadas

- Los complejos simpliciales son una herramienta enmarcable en la filosofía analítica de las matemáticas por su relación con la descomposición y el conocimiento de los objetos a partir de partes que los componen.
- Los grupos de Homología y Homotopía son herramientas sintéticas que surgen como el mixto entre álgebra y topología dando una nueva herramienta para caracterización de espacios topológicos.
- La esfera de homología de Poincaré surge como un contraejemplo esclarecedor para ver las limitaciones del grupo de homotopía, demarcando una parte del borde que tiene el grupo fundamental como herramienta para caracterizar espacios.
- La homología es un concepto Horótico, pues estudia cómo está compuesto el bordes de una variedad, aunque a la vez tiene un carácter analítico, pues al estudiar el borde lo descompone en sub-variedades de dimensión menor.
- La sucesión de numeros de Betti es un concepto sintético, pues cada P_m recopila la relación entre una variedad V y su conectividad con las posibles variedades de dimensión m.
- Los intentos de detección y caracterización de esferas ayudaron a **demarcar un borde** importante para el alcance de la homología y llevaron naturalmente a la formulación de la conjetura de Poincaré.

Es importante ver que no es simplemente la matemática la que cuenta con varios **niveles de estratificación**, el **pensamiento matemático** también es así, con las anteriores viñetas se ilustra cómo las ideas de Poincaré no son solo analíticas, ni solo sintéticas, quizá su poder se encuentra en que son un **gran mixto** de los diferentes modos de conocer, las diferentes formas de crear y conectar **ideas**.

A pesar de que se deben usar tanto el análisis, la síntesis y la horósis para estudiar las ideas de Poincaré, hay una **tendencia sintética** en conectar ramas distíntas para crear nuevos objetos ideales y como en el caso de los números de Betti, encontrar las relaciones de los objetos con su entorno.

El nacimiento del mixto de la topología algebraica se debe en gran medida a la idea sintética de entender el continuo de la topología a partir de lo discreto de la teoría de grupos.

11 Pregunta inquietante

Hemos ejemplificado la topología algebraica en el diagrama anterior usando muchos conceptos de la filosofía matemática de Lautman, Desantí y Chatelet. Luego llegamos a la conclusión de que el pensamiento matemático también está estratificado en distintos modos de operar, ya sean analíticos, sintéticos u horóticos.

Vale la pena preguntarse si los distintos estilos matemáticos de pensamiento se pueden enmarcar en un diagrama similar al expuesto, pero ya no de niveles de horizonte matemáticos sino con niveles de horizonte epistemológicos. Quizá se vean relaciones interesantes como que al romper los necesarios del análisis se salte a la síntesis o quizá al acumular suficientes posibles tanto del análisis como de la síntesis se salte a la horósis.

References

[1] John C Stillwell. *Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements*. English. United States of America: American Mathematical Society, 2010. ISBN: 9780821852347.

[2] Pierre Albin. *Algebraic Topology course*. Youtube. 2019. URL: https://youtu.be/XxFGokyYo6g?si=jHPk5RJc-G5yQIuH.

[3] @Boarbarktree. *You Could Have Invented Homology| Boarbarktree*. Youtube. 2020. URL: https://www.youtube.com/playlist?list=PLcaesJ30fdQ_qyizYsFvlm9LkJvj2CxxU.

[4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. English. New York, United States of America: Cambridge University Press, 2002.

[5] Prerna Nadathur. "An Introduction to Homology". In: 2007. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:1431656.

[6] Dirk Siersma. "Poincaré and Analysis Situs, the beginning of algebraic topology". In: 2012. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:49364102.

[7] R.C. Kirby and M.G. Scharlemann. "EIGHT FACES OF THE POINCARE HOMOLOGY 3-SPHERE". In: *Geometric Topology*. Ed. by JAMES C. CANTRELL. Academic Press, 1979, pp. 113–146. ISBN: 978-0-12-158860-1. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-158860-1.50015-0. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780121588601500150.

[8] *A Few of My Favorite Spaces: The Poincaré Homology Sphere*. 2017. URL: https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/a-few-of-my-favorite-spaces-the-poincare-homology-sphere/.